4. CAMBIOS DE VARIABLES, INTEGRALES IMPROPIAS Y APLICACIONES

4.1. El teorema del cambio de variable para integrales dobles

Teorema del cambio de variable en el plano

Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ compacto y $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto con $S \subset \Omega$. Sea $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, con derivadas parciales continuas, inyectiva en $\overset{\circ}{S}$ y tal que $\varphi^{-1} : \varphi(S) \longrightarrow S$ tiene derivadas parciales continuas. Entonces, si f es integrable sobre $\varphi(S)$, la función $(f \circ \varphi) \cdot |J_\varphi|$ es integrable sobre S y

$$\iint_{\varphi(S)} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_S f\left(x(u,v), y(u,v)\right) \cdot |J_\varphi(u,v)|\, du\, dv$$

donde J_φ es el Jacobiano de φ, es decir

$$J_\varphi(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Observaciones

1. La fórmula del cambio de variable sigue siendo válida aunque la inyectividad de φ falle en un conjunto de contenido nulo en $\mathbb{R}^2$.
2. El cambio de variable es procedente cuando se simplifica el recinto o la función.

Algunos cambios de variable usuales

1. **Coordenadas polares clásicas:** $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$ con $\rho \geq 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$.

   Aplica biyectivamente $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en $(0,\infty) \times [0,2\pi)$, siendo $|J| = \rho$, y queda

   $$\iint_S f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{S^*} f\left(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta\right) \rho\, d\rho\, d\theta$$

   donde S^* es el conjunto S en coordenadas polares. Con frecuencia

   $$S^* = \{(\rho,\theta) \,:\, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,\ \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta)\}$$

   y en este caso

   $$\iint_S f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f\left(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta\right) \rho\, d\rho$$

2. **Coordenadas polares centradas en** (x_0, y_0): $\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\theta \\ y = y_0 + \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases}$; $|J\varphi| = \rho$.

3. **Coordenadas elípticas centradas en** (x_0, y_0): $\begin{cases} x = x_0 + a\rho\cos\theta \\ y = y_0 + b\rho\operatorname{sen}\theta \end{cases}$; $|J\varphi| = ab\rho$.

4. Cuando el recinto $S \subset \mathbb{R}^2$ está limitado por cuatro curvas de la forma $\varphi(x,y) = a$, $\varphi(x,y) = b$, $\psi(x,y) = c$ y $\psi(x,y) = d$, suele dar buenos resultados hacer el cambio de variables

   $$\begin{cases} u = \varphi(x,y) \\ v = \psi(x,y) \end{cases}$$

   siempre que se cumplan las condiciones del teorema del cambio de variable.

Ejemplos

1. Calcula la integral de $f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ sobre $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq a^2,\ x, y \geq 0\}$.

2. Calcula la integral de $f(x,y = e^{\frac{y-x}{y+x}}$ sobre el triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(0,2)$.

3. Calcula el volumen de la región acotada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitada por el cilindro $x^2 + (y-a)^2 = a^2$, el plano $z = 0$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = 4az$, $a > 0$.

Ejercicios

1. Halla las siguientes integrales dobles utilizando un cambio de variables adecuado:

(a) $\iint_D \arctan \frac{y}{x}\, dx\, dy$, donde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x\sqrt{3}\right\}$.

(b) $\iint_D (x+y)\, dx\, dy$, donde D es la región acotada limitada por la curva $x^2 + y^2 = x + y$.

(c) $\iint_D \frac{x^2 e^{\frac{x^2}{y}}}{y(x^2+y^2)}\, dx\, dy$, donde D es el recinto limitado por las curvas $x = y$, $x = 2y$, $x^2 = y$ y $x^2 = 2y$.

2. Halla las áreas de las siguientes regiones planas:

(a) $\rho \leq 2a$, $\rho \leq 4a \cos\theta$, $a > 0$.

(b) $(x^2 + y^2)^2 \leq \sqrt{xy}$, e interior al primer cuadrante.

3. Calcula los volúmenes de los sólidos limitados por las siguientes superficies:

(a) $x^2 + 4y^2 = z$, $z = 0$, $y^2 = x$ y $x^2 = y$.

(b) $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2$, $z(2x^2 + y^2) = 2$ y $z = 0$.

(c) $x^2 + y^2 = 2x$, $z = x$ y $z = 2x$.

(d) $3x^2 + y^2 = 72z$ y $2x^2 + y^2 = 24(2 - z)$.

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

1. (a) $\frac{\pi^2}{6}$; **(b)** $\frac{\pi}{2}$; **(c)** $e(e-1)(\arctan 2 - \frac{\pi}{4})$.
2. (a) $(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3})a^2$; **(b)** $\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\Gamma(2/3)^2$.
3. (a) $\frac{3}{7}$; **(b)** $\pi\sqrt{2}\ln 2$; **(c)** π; **(d)** 24π.